

渦分布法翼理論における特異積分の数値計算法

和田 存功* 山本 富士夫**

A Computational Method for Singular Integral in Vortex Distribution Technique

Ari-isa WADA and Fujio YAMAMOTO

(Received Aug. 31, 1995)

Vortex distribution technique(VDT in abbreviation) which is one of the boundary element method has two main advantages. One is that computer memory size needed is smaller. The other is that computation time is shorter. But the integral equation as foundation includes singularity, and so that it needs some numerical techniques. We propose a new computational technique for numerical computation of singular integral in VDT. The advantage of this technique is analytical computation for singular integral. This technique has a generality for vortex functions and boundary shapes.

1 緒言

境界要素法の一つである渦分布法は、流れの中にある境界上に渦や吹き出しを連続的に分布させることにより、境界に働く圧力分布や流体力を求める方法である。主な特徴は、境界上の積分方程式が流れ場の基礎式となるため、計算に関する次元は流れ場の次元より一次元低くなり、差分法や有限要素法に比べて小メモリで高速化が可能なことである。しかし、基礎となる積分方程式は特異積分を含み、その計算にはコーシー積分等種々の技巧が必要となる。

*大学院システム設計工学専攻、アイシン・エイ・ダブリュ工業

**機械工学科

本論文では，二次元非圧縮非粘性定常流れ場における渦分布法の特異積分の数値計算に関して，渦関数と境界形状に普遍性を持つ新しい計算方法を提案する。

最初に，渦の強さの計算方法，離散化の方法，特異積分の計算方法の理論を述べる。次に，流れの様子，分割数に対する循環および計算時間の計算結果について述べる。最後に，この新しい方法の成果と計算結果を述べ，結果として本方法の有効性を示す。

記号

(渦の強さの計算：2章で使用)

$v(\xi)$: 点 ξ における複素速度 ($\xi = x + yi, i^2 = -1$)

$\bar{v}(\xi)$: $v(\xi)$ の共役複素速度

v_∞ : 物体まわりの一様流の速度

$g(\xi)$: 渦関数

C : 流れと物体の境界の閉曲線

s : 境界 C の弧長パラメータ

ξ : 境界 C の複素座標

ξ' : ξ の s による微分係数 ($= d\xi/ds$)

s' : s の ξ による微分係数 ($= ds/d\xi$)

$\gamma(\xi)$: 境界 C の点 ξ における渦の強さ, $\gamma(\xi) = \bar{v}(\xi) \xi'$

(離散化：3章で使用)

z_j : 境界 C の分割点, ($1 \leq j \leq n+1$), $z_1 = z_{n+1}$

L_j : 直線 $[z_j, z_{j+1}]$, ($1 \leq j \leq n$)

Δz_j : $= z_{j+1} - z_j$, ($1 \leq j \leq n$)

Δs_j : $= |\Delta z_j|$, ($1 \leq j \leq n$)

s'_j : $= \Delta s_j / \Delta z_j$, ($1 \leq j \leq n$)

z_{rj} : $= (z_{j+1} + z_j) / 2$, ($1 \leq j \leq n$)

n_j : $= \Delta z_j / (|\Delta z_j| i)$, ($1 \leq j \leq n$)

γ_j : z_j 上の渦の強さ, ($1 \leq j \leq n+1$)

(特異積分の計算：4章で使用)

$f(\xi) : = (\xi - z_{rk}) g(\xi - z_{rk})$

$z_{j1} : = (2z_j + z_{j+1}) / 3$, ($1 \leq j \leq n$)

$z_{j2} : = (z_j + 2z_{j+1}) / 3$, ($1 \leq j \leq n$)

$a_j(z) : = (s'_j / \Delta z_j) \int_{L_j} (\xi - z_{rj}) g(\xi - z) d\xi$, ($1 \leq j \leq n+1$)

$b_j(z) : = (s'_j / 2) \int_{L_j} g(\xi - z) d\xi$, ($1 \leq j \leq n+1$)

$H_j(z) : \bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \sum_{j=1}^n H_j(z) \gamma_j$ を満たす γ_j の係数

$$\begin{cases} = \{-a_1(z) + b_1(z)\} & , (j=1) \\ = \{-a_j(z) + b_j(z)\} + \{a_{j-1}(z) + b_{j-1}(z)\}, & (2 \leq j \leq n) \\ = \{a_{n+1}(z) + b_{n+1}(z)\} & , (j=n+1) \end{cases}$$

2 渦の強さの計算

2.1 渦の強さによる速度の表現

図1のような境界C周りの流れにおいて、共役複素速度 $\bar{v}(z)$ は渦関数 $g(\xi)$ と一様流速 v_∞ を含む式(1)で与えられる⁽¹⁾。

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \oint_C \bar{v}(\xi) g(z - \xi) d\xi \quad \dots\dots\dots(1)$$

式(1)を境界上の渦の強さ $\gamma(\xi)$ で表すと、式(2)となる。

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) &= \bar{v}_\infty + \oint_C \bar{v}(\xi) \xi'(s) s'(\xi) g(z - \xi) d\xi \\ &= \bar{v}_\infty + \oint_C \gamma(\xi) s'(\xi) g(z - \xi) d\xi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

2.2 渦関数の条件

渦関数 $g(\xi)$ に次の二つの条件を設定する。

(1) $g(\xi)$ は $\xi=0$ を1位の極に持つ。

$$g(\xi) = \alpha_{-1} \xi^{-1} + \phi'(\xi) \quad \dots\dots\dots(3)$$

(α_{-1} は係数、 ϕ は正則関数)

(2) $g(\xi)$ は不定積分 $G(\xi)$ を持つ。

$$G(\xi) = \int g(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots(4)$$

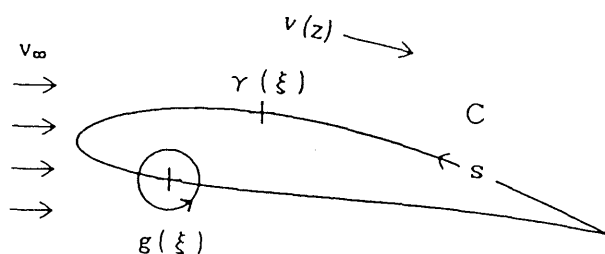


図 1 渦の強さによる速度の表現

渦関数 $g(\xi)$ の例を示す。

- | | | |
|---|---|----------|
| { | (1) 自由渦 ⁽²⁾ | |
| | $g(\xi) = 1/(2\pi i \xi)$ |(5) |
| { | (2) 複素周期 z_0 をもつ直線翼列渦 | |
| | $g(\xi) = \cot(\xi \cdot \pi/z_0)/(2z_0 i)$ |(6) |

図 2 と図 3 にそれぞれの流線図を示す。

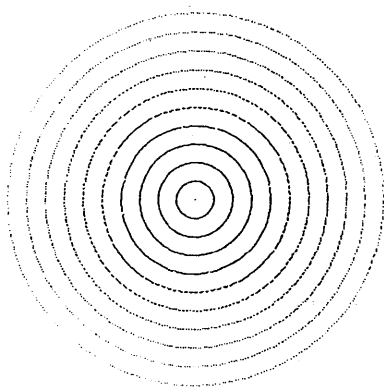


図 2 自由渦における流線

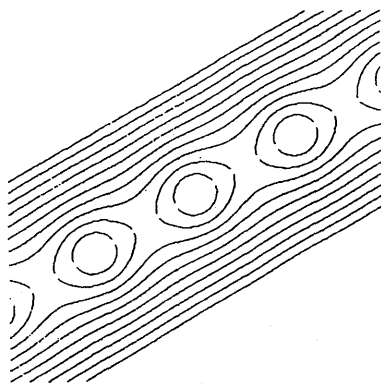


図 3 直線翼列渦における流線

2.3 渦の強さの計算

式(2)より、流れ場の任意点の速度は境界C上の渦の強さ $\gamma(\xi)$ により算出される。しかし、 $\gamma(\xi)$ の解析解を求めることは一般には不可能であるため、Cの離散化による近似解としての渦の強さを求めることになる。

渦の強さの例を示す。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{渦関数 (自由渦)} & \text{式(5)による} \\ \text{形状 (単位円)} & C = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\} \\ \text{渦の強さ}^{(3)} & \gamma(\theta) = -2\sin(\theta) \end{array} \right. \dots\dots\dots(7)$$

3 離散化

3.1 渦の強さの条件

渦の強さ $\gamma(\xi)$ に次の二つの条件を設定する。

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) \text{ 渦の強さは一次近似可能である} & \\ \gamma(\xi) = \gamma(\xi_0) + \gamma'(\xi_0)(\xi - \xi_0) & \dots\dots\dots(8) \\ (2) \text{ 直線区間 } L_j = [z_j, z_{j+1}] \text{ において} & \\ \gamma(z_{rj}) = \frac{1}{2}[\gamma(z_{j+1}) + \gamma(z_j)] & \dots\dots\dots(9) \\ \gamma'(z_{rj}) = [\gamma(z_{j+1}) - \gamma(z_j)]/\Delta z_j & \dots\dots\dots(10) \end{array} \right.$$

3.2 離散化

式(2)を離散化して図4⁽⁴⁾のように境界Cの分割点 z_j の各区間で表すと、式(11)となる。

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \gamma(\xi) s'(\xi) g(z - \xi) d\xi \dots\dots\dots(11)$$

式(9),(10)を式(11)に代入して部分積分を行うと式(12)を得、さらに係数を整理することにより式(13)を得る。

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \sum_{j=1}^n \{ [\gamma_{j+1} + \gamma_j] b_j(z) + [\gamma_{j+1} - \gamma_j] a_j(z) \} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$= \bar{v}_\infty + \sum_{j=1}^{n+1} H_j(z) \gamma_j \quad \dots\dots\dots(13)$$

渦の強さ γ_j は、次の条件(14),(15)よりなる $(n+1)$ 個 の連立方程式の解として得られる。

(1) 各 z_{rk} (参照点) における速度の法線条件

$$0 = \operatorname{Re}\{\bar{v}(z_{rk}) n_k\}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$= \operatorname{Re}\{\bar{v}_\infty n_k\} + \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}\{H_j(z_{rk}) n_k\} \gamma_j \quad \dots\dots\dots(14)$$

(2) 翼後縁におけるクッタの条件

$$0 = \gamma(z_1) + \gamma(z_{n+1}) \quad \dots\dots\dots(15)$$

しかし、 $H_j(z_{rk})$ 、すなわち $a_j(z_{rk})$ および $b_j(z_{rk})$ は特異積分を含む。次章では、 $H_j(z_{rk})$ の計算に関して、特異性を持たない場合に誘導された解が特異性を持つ場合に対しても適用可能であることを示す。

4 特異積分の計算

4.1 特異性の考慮

条件(3),(4)を満たす渦関数 $g(\xi)$ に対して、直線経路 L_j における $g(\xi - z_{rk})$ および $(\xi - z_{rk})$ $g(\xi - z_{rk})$ の線積分を考察する。式(14)における $a_j(z_{rk})$, $b_j(z_{rk})$ の特異性の有無を表1に示す。

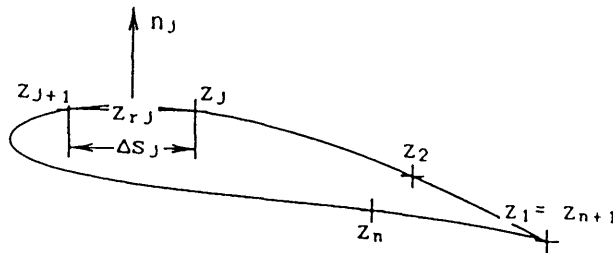


図 4 離散化

表 1 jとkによる特異性の有無

	$a_j(z_{rk})$	$b_j(z_{rk})$
$j \neq k$	特異性を持たない	特異性を持たない
$j = k$	特異性を持つ*	特異性を持つ

*除去可能な特異性を持つ。

4.2 特異性を持たない場合の積分

$j \neq k$ の時、被積分関数は経路内で特異性を持たないため、形式的な計算を行えば式(16),(17)となる。

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 (1) \quad & \int_{L_j} g(\xi - z_{rk}) d\xi \\
 & = [G(\xi - z_{rk})]_{L_j} \\
 & = G(z_{j+1} - z_{rk}) - G(z_j - z_{rk}) \quad \dots\dots\dots(16) \\
 (2) \quad & \int_{L_j} (\xi - z_{rk}) g(\xi - z_{rk}) d\xi \\
 & = \int_{L_j} f(\xi) d\xi \\
 & = \Delta z_j [f(z_j) + 3f(z_{j1}) + 3f(z_{j2}) + f(z_{j+1})] / 8 \quad \dots\dots\dots(17) \\
 & \quad \text{(Simpson-3/8公式を用いた場合)}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

4.3 特異性を持つ場合の積分

4.3.1 $a_j(z_{rk})$ の計算

特異性を持つ場合の $a_j(z_{rk})$ の計算方法を図5に示す。式(3)より被積分関数 $f(\xi)$ は積分経路で連続となり、式(17)が成立する。しかし、数値計算を実行する上で $f(z_{rj})$ は直接計算できない。よって、 $f(z_{rj})$ を使用しない方法(台形公式・Simpson 3/8公式等)により、積分近似を行う必要がある。また、Simpson 1/3公式では $f(z_{rj})$ を使用して計算を行う。

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \int_{L_j} (\xi - z_{rk}) g(\xi - z_{rk}) d\xi \\
 & = \int_{L_j} f(\xi) d\xi \\
 & = \text{式(17)}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

4. 3. 2 $b_j(z_{rk})$ の計算

特異性を持つ場合の $b_j(z_{rk})$ の計算方法を図6に示す。式(3)より被積分関数 $f(\xi)$ は積分経路で連続となる任意の微小半径 ε に対して積分経路を図4のように L_j' にとり積分計算を行うと、 ε に依存しないコーシーの主値を得ることができ、その値が式(16)となることは式(4)とコーシーの積分定理を用いて次のようにして証明される。

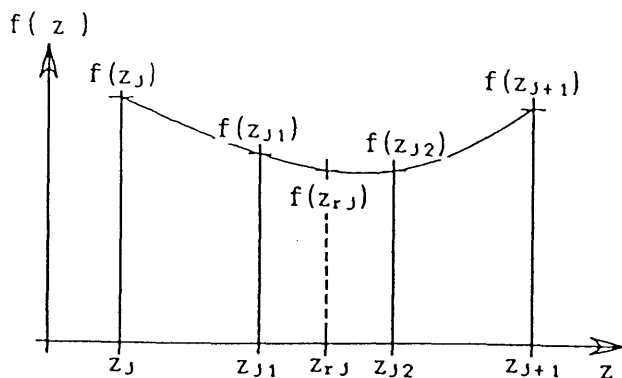


図 5 $a_j(z_{rk})$ の計算方法

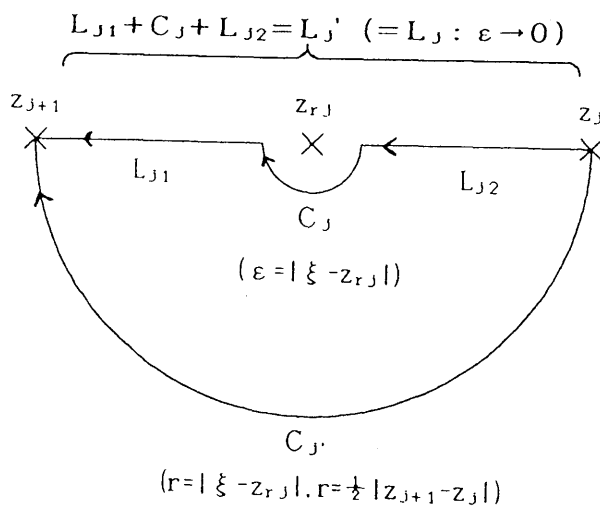


図 6 $b_j(z_{rk})$ の計算方法

$$\begin{aligned}
& \int_{L_j} g(\xi - z_{rk}) d\xi \\
&= \int_{L_j} g(\xi - z_{rk}) d\xi \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \\
&= \int_{L_j} \alpha_{-1}(\xi - z_{rk})^{-1} d\xi + \int_{L_j} \phi'(\xi - z_{rk}) d\xi \\
&= \alpha_{-1}(\int_{L_{j1}} + \int_{c_j} + \int_{L_{j2}})(\xi - z_{rk})^{-1} d\xi + \int_{L_j} \phi'(\xi - z_{rk}) d\xi \\
&= \alpha_{-1} \int_{c_j} (\xi - z_{rk})^{-1} d\xi + \int_{L_j} \phi'(\xi - z_{rk}) d\xi \\
&= \alpha_{-1} \int_{c_j} (\xi - z_{rk})^{-1} d\xi + \int_{L_j} \phi'(\xi - z_{rk}) d\xi \\
&= \alpha_{-1} \int_{c_j} (\xi - z_{rk})^{-1} d\xi + \int_{L_j} \phi'(\xi - z_{rk}) d\xi \\
&= \alpha_{-1} [\log(\xi - z_{rk})]_{L_j} + [\phi(\xi - z_{rk})]_{L_j} \\
&= [\alpha_{-1} \log(\xi - z_{rk}) + \phi(\xi - z_{rk})]_{L_j} \\
&= [G(\xi - z_{rk})]_{L_j} \\
&= \text{式(16)}
\end{aligned}$$

5 計算結果

本方法を用いた計算結果を述べる。モデルを単位円柱・カルソートレフ単独翼・カルソートレフ直線翼列として計算を行い、流れの様子・循環 Γ ・渦の強さの計算時間について検討を行った。本論文においては、計算には速度が28.5Mipsのワークステーションを用い、連立方程式を解くには前進消去・後退代入法を用いた。カルソートレフ翼形状は偏心量 $(-0.1, 0.1)$ ・後縁角 10° で作成し、さらに時計まわりに $+10^\circ$ の回転を与えた。直線翼列渦の複素周期は、 $z_0 = 0.5 + 1.4i$ で与えた。

5.1 流れの様子

一様流速 $v_\infty = 1 + 0i$ の時の流れの様子を図7～図12に示す。渦関数としては、単位円柱およびカルソートレフ単独翼は自由渦の式(5)を、カルソートレフ翼列は直線翼列渦の式(6)を用いた。

5.2 分割数と循環 Γ

分割数と循環 Γ の関係を表2および図13に示す。単位円柱まわりの循環 Γ の厳密解は、式(7)より $\Gamma = 0$ となる。各分割における誤差は 10^{-14} のオーダーであることより、本計算方法の精度は

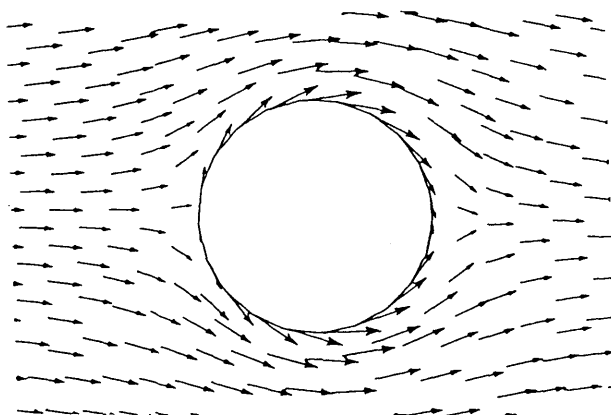


図 7 円柱まわりの速度ベクトル

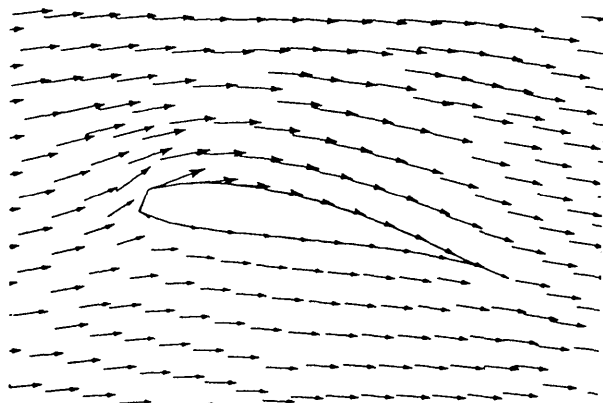


図 8 ガルマントレフツ単独翼まわりの速度ベクトル

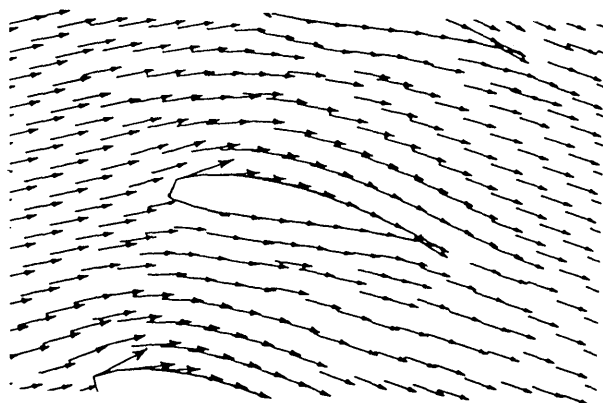


図 9 ガルマントレフツ直線翼列まわりの速度ベクトル

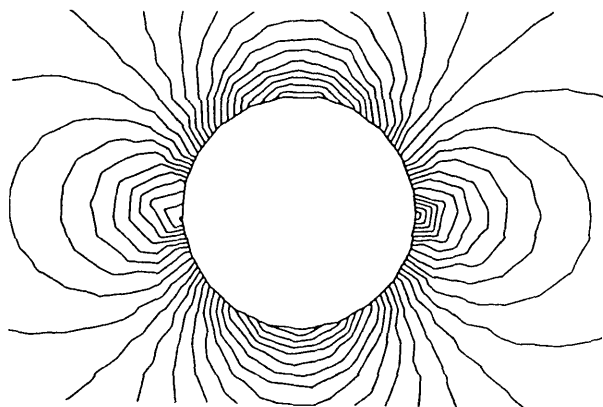


図 10 円柱まわりの速度分布

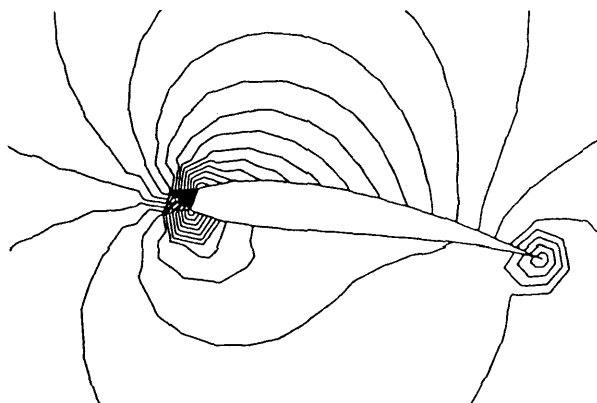


図 11 カルマン・トルバツ単独翼まわりの速度分布

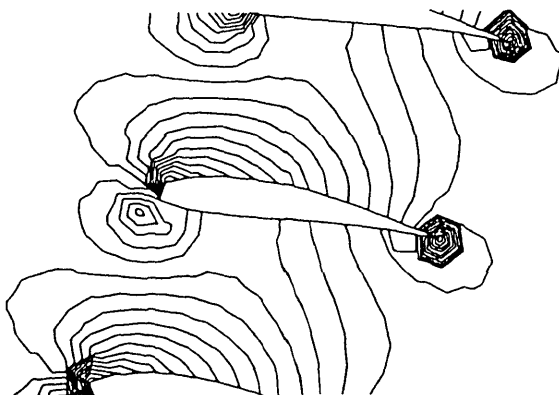


図 12 カルマン・トルバツ直線翼列まわりの速度分布

表 2 分割数と循環 Γ および計算時間

分割数	単位円柱		カルマートレフツ単独翼		カルマートレフツ直線翼列	
	循環	時間 (秒)	循環	時間 (秒)	循環	時間 (秒)
10	1.66533D-15	1	-1.7642228	1	-0.8389768	1
20	-9.97812D-15	1	-1.8080573	1	-0.8484526	1
30	-6.54337D-15	1	-1.7781224	1	-0.8286484	1
40	-1.59629D-14	1	-1.8759933	2	-0.8906275	3
50	3.53189D-15	2	-1.8447739	1	-0.8662303	3
60	2.37344D-14	2	-1.8407250	2	-0.8625259	6
70	7.40726D-16	3	-1.8427096	3	-0.8636011	7
80	-1.89102D-14	4	-1.8431324	4	-0.8635933	9

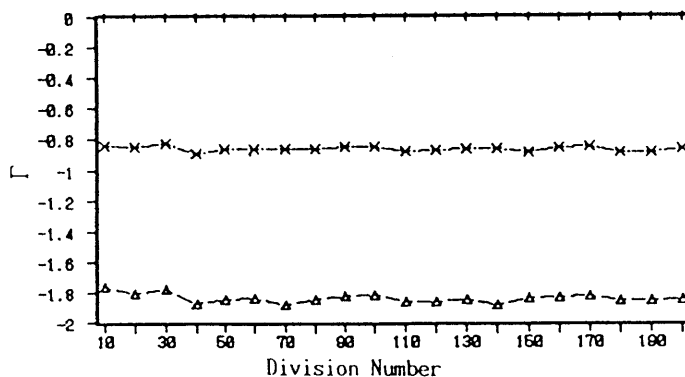


図 13 分割数による循環 Γ の値の収束状況
(+円柱, Δ カルマートレフツ単独翼, \times カルマートレフツ直線翼列)

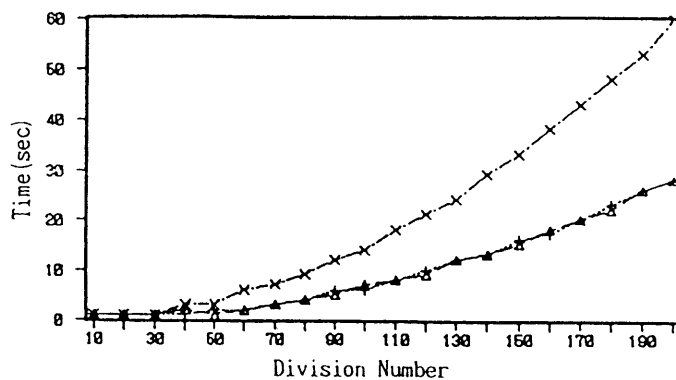


図 14 分割数と循環の計算時間
(+円柱, Δ カルマートレフツ単独翼, \times カルマートレフツ直線翼列)

非常に良い。 $\Gamma \approx 0$ は他の文献⁽⁵⁾にも示されているが、計算結果の精度が良いのは本計算方法の精度の良さを示すものである。他の二つのモデルの循環の収束状況については、図13のように収束に若干の振動が見られるが、分割数を50以上にとれば十分高い精度を得られる。

5.3 分割数と計算時間

分割数と計算時間の関係を表2および図14に示す。計算時間は放物的に変化していることがわかる。

6 結言

渦分布法翼理論における特異積分の数値計算に関して、渦関数に複素関数論による考察を加えた新しい数値計算方法を提案し、単位円柱・カルモントレフツ単独翼・カルモントレフツ直線翼列の数値計算結果に対する検討を行うことにより、本計算方法の特長として次の事柄を明らかにした。

- (1) 特異積分を解析的に計算することができる。
- (2) 境界形状および渦関数の変更に対して、計算式は普遍性を持つ。
- (3) 少ない分割数で十分な解析精度を上げることができる。

以上をまとめると、次の結言を得る。

渦分布法翼理論における渦の強さの計算方法について述べた。本方法により、不定積分を持ち一位の極を持つ渦関数に対しては特異性を考慮することなく渦の強さの計算が可能となることを示した。

参考文献

- (1) 日本機械学会編，流れの数値シミュレーション，(1989)，230.，コロナ社．
- (2) 今井功，流体力学，(1989)，67.，岩波書店．
- (3) 村田暹，田中周治，機械の研究，38-7，(1986)，797．
- (4) 水野明哲，流れの数値解析入門，(1990)，94.，朝倉書店．
- (5) 大橋秀雄，流体力学Ⅰ，(1991)，145.，コロナ社．

